www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1990

E.M.E.

MATHEMATIQUES

Régime technologique

JOUR	:	Vendredi 18 mai 1990 8 heures à 12 heures
DUREE	:	4 heures
COEFFICIENT	:	3

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème I. — Résolution de l'équation $e^x = -x$ à l'aide de la méthode de Newton.

A) 1) Soit f la fonction numérique de variable réelle qui à x associe $e^x + x$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbf{R}$; on la note a.

2) Soit g la fonction numérique de variable réelle qui à x associe $\frac{x-1}{1+e^{-x}}$. Montrer que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes.

B) Étude de la fonction g.

1) Soit k la fonction numérique de variable réelle qui à x associe $1 + xe^{-x}$; établir le tableau des variations de k; calculer $k(a)$; indiquer le signe de $k(x)$ en fonction de x.

2) Utiliser la question précédente pour établir le tableau des variations de g.

3) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité : 3cm). Préciser les branches infinies de $\mathcal{C}$.

4) Établir la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x - 1$.

5) Dessiner $\mathcal{C}$ et D.

6) Indiquer le nombre de points d'inflexion de $\mathcal{C}$ en utilisant le dessin précédent. (Il n'est pas demandé de calculs).

C). — Étude d'une suite de valeurs approchées de a : soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1) Calculer des valeurs approchées de u_1, u_2 et u_3 avec la précision de la calculatrice.

2) Montrer que, pour tout entier n, u_n est compris entre a et $-\frac{1}{2}$.

3) Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On pourra utiliser la question précédente et B) 1).

4) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a.

5) Montrer que, pour tout x entre a et $-\frac{1}{2}$, $|g'(x)| \leq 0,2$. (Utiliser le sens de variation de k et une valeur approchée de $e^{-\frac{1}{2}}$).

6) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - a| \leq 0,2|u_n - a|$.

En déduire : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $|u_n - a| \leq (0,2)^n \times 0,1$.

Trouver un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de a à 10^{-10} près.

.../...

Problème II. — On s'intéresse à la phase finale d'un jeu lors d'un match de tennis. Deux joueurs A et B jouent une succession de points. Un point joué est toujours gagné, soit par le joueur A, soit par le joueur B. Il y a quatre situations possibles, numérotées de 1 à 4.

Situation numéro 1 : les joueurs sont à égalité (c'est la situation initiale).

Situation numéro 2 : avantage pour le joueur A.

Situation numéro 3 : avantage pour le joueur B.

Situation numéro 4 : fin du jeu (on ne distingue pas les deux issues possibles : A gagne ou B gagne).

On considère que les deux joueurs sont d'égale force, donc que chaque joueur a une chance sur deux de gagner chacun des points joués.

De la situation 1, on passe à la situation 2 ou à la situation 3 suivant que le point est gagné par A ou par B ; de la situation 2 on passe à la situation 4 si A gagne le point, sinon on revient à la situation 1 ; de même, de la situation 3 on revient à la situation 1 si A gagne le point, sinon on passe au 4.

Bien que le jeu soit terminé dès qu'on atteint la situation 4, on va considérer, pour modéliser le jeu, que l'on reste toujours dans cette situation dès qu'on l'a atteinte.

Soit X_n la variable aléatoire dont la valeur est le numéro de la situation lorsque n points ont été joués depuis la situation initiale, pour $i \in \{1;2;3;4\}$ et $j \in \{1;2;3;4\}$, on note a_{ij} la probabilité que X_{n+1} soit égal à i sachant que X_n vaut j. Soit A la matrice dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est a_{ij}.

1) Justifier
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Chercher les valeurs propres de la matrice A.

3) Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$; calculer P^{-1}, en indiquant les calculs intermédiaires.

4) Calculer $D = PAP^{-1}$.

5) Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = P^{-1}D^nP$.

6) Calculer A^{10}.

7) Soit
$$Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix} ; \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n : $Y_{n+1} = AY_n$.
Montrer que, pour tout entier naturel n : $Y_n = A^nY_0$.
Calculer Y_{10}.

- :- :- :- :- :- :-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail